AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

ÜÇ DİSKRET TÖRƏMƏLİ İKİNCİ TƏRTİB DİFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN KOŞİ VƏ SƏRHƏD MƏSƏLƏLƏRİNİN HƏLLİNİN ARAŞDIRILMASI

İxtisas: 1211.01 – Diferensial tənliklər
Elm sahəsi: Riyaziyyat
İddiaçı: **Vüsalə Sabir qızı Sultanova**

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı- 2022

Dissertasiya işi Lənkəran Dövlət Universitetinin Riyaziyyat və informatika kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbərlər: riy.e.d., prof. **Nihan Əlipənah oğlu Əliyev**
riy.e.d., prof. **Natiq Səhrab oğlu İbrahimov**

Rəsmi opponentlər: riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Rafiq Qələndər oğlu Tağıyev

riyaziyyat elmləri doktoru
Yusif Soltan oğlu Qasımov

fiz.-riy. elm.namizədi, dosent
Tofiq Mövsum oğlu Əliyev

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının Bakı Dövlət Universitetinin nəzdində fəaliyyət göstərən FD 2.17 Dissertasiya Şurası

Dissertasiya şurasının sədri:
AMEA–nın həqiqi üzvü, f. –r.e.d., professor

_______________ **Məhəmməd Fərman oğlu Mehdiyev**

Dissertasiya şurasının elmi katibi: mex. üzrə elmlər dok., dosent

_______________ **Laura Faiq qızı Fətullayeva**

Elmi seminarın sədri: r.e.d., professor

______________ **Yaqub Əmiyar oğlu Şərifov**

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi. Demək olar ki, bir çox təbiət hadisələrinin, kimyəvi, bioloji və tibbi hadisələrin riyazi modeli adi və ya xüsusi törəməli diferensial tənliklər üçün qoyulmuş məsələlərə gətirilir. Bunlar isə əsasən Koşi, qarışıq və sərhəd məsələləri olur. Bu məsələlər ilə adi diferensial tənliklər, riyazi fizika tənlikləri və xüsusi törəməli tənliklər kurslarında məşğul olurlar. Adi diferensial tənliklər üçün Koşi və sərhəd məsələlərinə, xüsusi törəməli tənliklər üçün isə Koşi, qarışıq və sərhəd məsələlərinə baxılır.

Xüsusi törəməli tənliklərə baxıldıqda, əsasən üç növ tənliklər - hiperbolik, parabolik və elliptik tip tənliklər üçün qoyulmuş məsələlər tədqiq olunur. Bu zaman hiperbolik və parabolik tip tənliklər üçün Koşi və qarışıq məsələ, elliptik tip tənliklər üçün isə sərhəd məsələləri araşdırılır. Hiperbolik tip tənliyin kanonik şəkli simin rəqs tənliyi, parabolik tip tənliyin kanonik şəkli istilikkeçirmə tənliyi, elliptik tip tənliyin kanonik şəkli isə Laplas tənliyidir.

Adi diferensial tənliklər üçün baxılan məsələlərdə verilən şərtlərin sayi tənliyin tərtibinə bərabər olmalıdır. Koşi məsələsində başlığıc şərtlərin sayı, sərhəd məsələsində isə sərhəd şərtlərinin sayi tənliyin tərtibinə bərabər olmalıdır.

Xüsusi törəməli tənliklərdə başlanğıc sərtlərin sayi verilmiş tənliyə daxil olan zamana görə törəmənin tərtibinə bərabər olduğu halda, sərhəd sərtlərinin sayı (fəza dəyişənlərinin sayi birdən çoxdursa və sərhədi hamar oblastdırsa) fəza dəyişənlərinə görə törəmənin tərtibinin yarısına bərabər olur. Belə ki, Laplas tənliyi ikinci tərtib törəməli diferensial tənlik olduğu üçün bir sərhəd şərti verilir. Bu şərt ya Dirixle, ya Neyman və yaxud da Puankare şərti ola bilər. Bu şərtlər lokal şərtlər adlanır. Biharmonik tənlik dördüncü tərtib törəməli tənlik olduğundan iki sərhəd şərti vermək lazımdır. Ona görə də riyazi fizika tənliklərində və xüsusi törəməli tənliklərdə sərhəd məsələlərinə, əsasən cüt tərtib törəməli tənliklər üçün baxılır.

Koşi-Riman tənliyi birinci tərtib elliptik tip tənlik olduğundan onun üçün hansı şəkildə sərhəd məsələsinə baxılmalıdır ki, məsələ korrekt qoyulsun və Fredholm tipli olsun.

Göstərilmişdir ki, əgər hamar sərhədli müstəvi oblastda Koşi-Riman tənliyinə baxılarsa, onda sərhədi iki yerə bölməklə, bu hissələrdə axtarılan funksiyanın qiymətlərini bir-birinə birləşdirməklə alınan qeyri-lokal sərhəd şərti Koşi-Riman tənliyi üçün kifayətdir, yəni bu şəkildə verilmiş qeyri-lokal sərhəd şərti daxilində məsələ Fredholm tiplidir. Başqa sözlə desək, Koşi-Riman tənliyi üçün sərhəd iki yerə bölünməklə verilmiş qeyri-lokal sərhəd şərti daxilində məsələ, işdə alınan zəruri şərtlərin köməyilə axtarılan funsiyanın sərhəd qiymətlərinə nəzərən normal şəkilli, nüvəsində sinqulyarlıq olmayan ikinci növ Fredholm tipli inteqral tənliklər sisteminə gətirilir.

Bizim orta məktəbdə və ali məktəbdə keçdiyimiz analiz additiv analizdir, yəni cəmin törəməsi törəmələrin cəminə, cəmin inteqralı, inteqralların cəminə bərabərdir. Burada additivlik xassəsi mövcuddur. Multiplikativ analiz keçən əsrdə meydana gəlməsinə baxmayaraq (Qantmaxerin “Matrislər nəzəriyyəsi” kitabında multiplikativ törəmə, multiplikativ inteqral və onların sadə xassələri verilmişdir) son zamanlar multiplikativ törəməli tənliklər üçün məsələlərə yenidən baxılmağa başlanılmışdır.

Poverativ törəmə və poverativ inteqral anlayışları professor N.Ə.Əliyev tərəfindən verilmişdir. Bunun üçün yeddi cəbri əməl kifayət etmədiyindən, yeni düz əməl və yeni tərs əməl təyin etmək lazım gəlir.

Additiv analizin diskret halı çoxdan məlumdur. Onu fərqlər tənlikləri adlandırırlar. Diskret multiplikativ və diskret poverativ törəməli tənliklər üçün məsələlərə N.Ə.Əliyev baxmışdır. N.Ə.Əliyevin tələbələrindən diskret additiv və diskret multiplikativ törəməli diferensial tənliklər üçün məsələlərə O.L.Həsəni və T.S.Məmiyeva, diskret additiv, diskret multiplikativ və diskret poverativ törəməli adi diferensial tənliklər üçün məsələlərə (iki hədli tənliklər üçün) A.M.Məmmədzadənin işlərində, nəhayət, üç diskret törəməli adi və xüsusi törəməli diferensial tənliklər üçün məsələlərə isə təqdim olunan dissertasiya işində baxılmışdır.

Burada baxılan ixtiyari tənliyi açıq şəkildə fərqlər tənliyi kimi yazsaq, alınan tənliyin çox mürəkkəb bir qeyri-xətti tənlik olduğunu görərik. Bütün baxılan hallarda müəllif məsələnin həlli üçün analitik ifadə (həllin aşkar ifadəsini) almağa müvəffəq olmuşdur. Bu, dissertasiya işinin həm aktuallığını, həm də işlənmə dərəcəsini təyin etmiş olur.

Tədqiqatın obyekti və predmeti. Adətən kəsilməz məsələlərin həllinin araşdırılması çətin olan hallarda qoyulan məsələ diskretləşdirilir, alınan cəbri tənliklər sistemi həll edilir və həldə baxılan addım sıfra yaxınlaşdırılmaqla limitə keçirilir ki, bu da kəsilməz məsələlərin həlli üçün müəyyən bir nəticəyə gəlməyə imkan verir.

Burada bizim məqsədimiz diskret riyazi modelləri araşdırmaqdan ibarətdir. Əsasən qeyri-xətti tənliklər üçün Koşi və sərhəd məsələlərinə həm adi, həm də xüsusi törəməli diferensial tənliklər üçün baxılmışdır.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri. Dissertasiya işinin əsas məqsədi baxılan çox mürəkkəb qeyri-xətti tənliklər üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həllinin analitik ifadəsini almaqdan ibarətdir. Belə ki, əvvəlcə baxılan tənliyin müəyyən ixtiyari sabit və ya ixtiyari ardıcıllıqlardan (çoxölçülü halda) ibarət olan ümumi həlli təyin edilir. Sonra isə ümumi həllə daxil olan ixtiyari sabitlər və ya ardıcıllıqlar verilmiş başlangıc və ya sərhəd şərtlərinin köməyilə təyin olunurlar.

Tədqiqatın metodları. Məlumdur ki, Eyler additiv törəməyə görə invariant olan e^x funksiyasını, sonra isə $e^{\lambda x}$ funksiyasını təyin etmişdir. Bu funksiyanın köməyilə sabit əmsallı, xətti, bircins diferensial tənliyi cəbriləşdirdi, yəni diferensial tənliyə qarşı cəbri tənlik (xarakteristik tənlik) qoymuş oldu. Sonra tənlik üçün ümumi həll quruldu və məsələlərin həlli üçün analitik ifadə alınmış oldu. Təqdim olunan dissertasiya işində diskret törəməli adi və xüsusi törəməli diferensial tənlik üçün yuxarıda qeyd olunan məlum üsuldan istifadə edilmişdir.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar. Dissertasiya işində aşağıdakı əsas müddəalar müdafiəyə çıxarılmışdır:

1. diskret additiv törəməli adi diferensial tənliklər üçün baxılan sərhəd məsələsinə qoşma məsələnin qurulması və öz-özünə qoşmalıq şərtinin müəyyən olunması;
2. diskret additiv və diskret multiplikativ törəməli, törəmələrə nəzərən xətti olan (əslində qeyri-xətti) birinci tərtib diferensial tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həlli üçün analitik ifadələrin alınması;
3. ikinci diskret törəməli adi diferensial tənliklər üçün (çoxhədli) Koşi və sərhəd məsələlərinin həllinin analitik ifadələrinin alınması;
4. diskret additiv, multiplikativ və poverativ törəməli ikinci tərtib iki ölçülü diferensial tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həllinin analitik ifadələrinin alınması.

Tədqiqatın elmi yeniliyi. Dissertasiya işində aşağıdakı elmi yeniliklər alınmışdır:

1. M.A.Naymarkın adi diferensial tənliklər üçün qoyulmuş sərhəd məsələlərinə qoşma məsələ qurulmuş və öz-özünə qoşmaq şərtinin təyini diskret additiv törəməli diferensial tənliklər üçün (fərqlər tənlikləri üçün) aparılmışdır;
2. L.Eylerin adi diferensial tənliklər üçün vermiş olduğu həll sxemi birinci və ikinci tərtib adi diskret additiv, multiplikativ və poverativ törəməli tənliklər üçün aparılmışdır;
3. elə birinci tərtib diskret multiplikativ və diskret poverativ törəməli adi diferensial tənliyə baxılmışdır ki, həllin araşdırılmasında bildiyimiz yeddi cəbri əməl kifayət etmir, ona görə də yeni düz əməl və yeni tərs əməl təyin etmək lazım gəlir. Bu əməl (düz əməl) yandan qüvvətə yüksəltmə əməli, onun tərsi isə yeni loqarifmləmə əməlidir;
4. ilk dəfə təqdim olunan dissertasiya işində diskret additiv, multiplikativ və poverativ törəməli çoxölçülü diferensial tənliklər üçün Koşi və sərhəd məsələlərinə baxılmışdır. İki ölçülü ikinci tərtib diferensial tənliklər üçün baxılan

məsələlərin həlli üçün də adi diferensial tənliklərdə olduğu kimi analitik ifadələr alınmışdır.

Tədqiqatın nəzəri və praktik əhəmiyyəti. Nəzəri xarakter daşıyan dissertasiya işindən təqribi həllərin alınması üçün istifadə edilə bilər. Bu tip mövzular Bakı Dövlət Universitetinin Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsinin Tətbiqi analizin riyazi üsulları kafedrasında magistr təhsil səviyyəsində tədris olunur.

İşin aprobasiyası və tətbiqi. Dissertasiya işinin əsas müddəaları mütəmadi olaraq Lənkəran Dövlət Universitetinin Riyaziyyat və informatika kafedrasının seminarlarında, həmçinin, aşağıdakı elmi konfranslarda: XXXV İnternational Conference Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2020), XXXVI İnternational Conference Problems of decision making under Uncertainties (PDMU-2021) və "Müasir təlim texnologiyaları tətbiq olunmasının təhsilin keyfiyyətinə təsiri" mövzusunda gənc tədqiqatçıların Respublika Elmi-praktik konfransı (Lənkəran Dövlət Universiteti, 2019) məruzə edilmişdir.

Müəllifin şəxsi töhfəsi. İşlərdə (məqalələrdə və konfrans materiallarında) qoyulmuş məsələlər müəllif tərəfindən həll edilmişdir. Müəllif alınmış nəticələrə cavabdehdir.

Müəllifin nəşrləri. Dissertasiya işinin əsas nəticələri 9 işdə dərc olunmuşdur, onlardan 6-sı məqalə, 3-ü isə konfrans materialıdır və onlar avtoreferatın sonunda verilmişdir.

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı. Dissertasiya işi Lənkəran Dövlət Universitetinin Riyaziyyat və informatika kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi. Dissertasiya işi giriş, üç fəsil, nəticə və istifadə olunmuş ədəbiyyat siyahısında ibarətdir. Giriş - 24 səhifə, 31840 işarə, I fəsil - 21 səhifə, 17704 işarə, II fəsil - 25 səhifə, 24884 işarə, III fəsil - 32 səhifə, 25992 işarə, nəticə - 2 səhifə, 460 işarədən ibarət olmaqla, dissertasiyanın ümumi həcmi 110 səhifə, 132750 işarədir.

İŞİN ƏSAS MƏZMUNU

Dissertasiya işinin *girişində* qoyulmuş diskret məsələlərin meydana gəlmə yolundan bəhs edilmişdir. Bu diskret məsələlərin əsasını kəsilməz məsələlər təşkil etdiyindən *girişdə* kəsilməz məsələlərin inkişaf mərhələlərinə geniş yer verilmişdir.

Sonra isə diskret məsələlərə keçilmiş və riyaziyyatın bu istiqamətinin inkişafı addım-addım göstərilmişdir.

Qeyd edək ki, diskret hadisələr yaxşı araşdırılmamışdır. Belə ki, məlum olan diskret hadisələr ədədi silsilənin ümumi həddinin təyini, həndəsi silsilərin ümumi həddinin təyini və dovşanların artma qaydasını göstərən Fibonaççi ardıcıllığının ümumi həddinin təyinidir.

Ədədi silsilənin ümumi həddinin tapılmasının riyazi modeli birinci tərtib adi diskret additiv törəməli diferensial tənlik üçün Koşi məsələsinə, həndəsi silsilənin ümumi həddinin tapılmasının riyazi modeli birinci tərtib adi diskret multiplikativ törəməli diferensial tənlik üçün Koşi məsələsinə, Fibonaççi ardıcıllığının ümumi həddinin tapılması isə ikinci tərtib adi diskret additiv törəməli diferensial tənlik üçün Koşi məsələsinə gətirilir.

İki hissədən ibarət olan dissertasiya işinin *birinci fəslində*

$$ly_n = y_n^{(/)} + ay_n = f_n, 0 \leq n < N \,, \qquad (1)$$

$$y_N + \alpha y_0 = 0 \qquad (2)$$

sərhəd məsələsindən başlanılmışdır.

Bu sərhəd məsələsinə qoşma məsələ

$$l^* z_n = (a-1) z_n^{(/)} + a z_n = g_n, 0 \leq n < N \qquad (3)$$

$$\alpha z_N + z_0 = 0 \qquad (4)$$

şəklində alınmışdır. Burada f_n və g_n verilmiş ardıcıllıqlar, a və α isə verilmiş sabit ədədlərdir.

Verilmiş (1) – (2) məsələsinin öz-özünə qoşmalıq şərti

$$a = 2, \alpha = 1 \qquad (5)$$

şəklindədir. Alınan nəticələri iki teorem vasitəsilə aşağıdakı kimi vermək olar.

Teorem 1. Əgər a, α verilmiş həqiqi ədədlər, f_n isə verilmiş həqiqi qiymətli ardıcıllıqdırsa, onda (1) – (2) məsələsinə qoşma məsələ (3) – (4) şəklində olub, $a = 2$, $\alpha = 1$ isə (1) – (2) məsələsinin öz-özünə qoşmalıq şərtidir.

Sonra isə bu fəsildə

$$ly_n \equiv y_n^{(//)} + ay_n^{(/)} + by_n = f_n\ , 0 \le n \le N-2, \tag{6}$$

$$\begin{cases} y_N + \alpha y_0 = 0, \\ y_{N-1} + \beta y_1 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

sərhəd məsələsinə baxılmışdır. Bu məsələyə qoşma məsələ

$$l^* z_n \equiv (1 - a + b) z_n^{\left(\frac{-}{-}\right)} + (2b - a) z_n^{(-)} + bz_n = g_n,$$

$$0 \le n \le N-2, \tag{8}$$

$$\begin{cases} \beta(a-2) z_N + \beta z_{N-1} + z_1 = 0, \\ \quad az_n + (a-2) z_1 + z_0 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

şəklində alınmışdır, burada a, b, α və β verilmiş həqiqi sabitlər, f_n və g_n verilmiş həqiqi qiymətli ardıcıllıqlardır. Verilmiş (6) – (7) məsələsinin öz-özünə qoşmalıq şərti isə

$$a = b = 2, \alpha = \beta = 1 \tag{10}$$

şəklindədir. Burada alınan nəticəni aşağıdakı şəkildə vermək olar.

Teorem 2. Əgər a, b, α və β verilmiş həqiqi sabitlər, f_n isə verilmiş həqiqi qiymətli ardıcıllıqdırsa, onda (6) – (7) məsələsinə qoşma məsələ (8) – (9) şəklində, bu məsələnin öz-özünə qoşmalıq şərti isə (10) şəklindədir.

Burada f_n və g_n ardıcıllıqlarının qoşma məsələyə təsiri yoxdur.

Üç hissədən ibarət olan *ikinci fəsildə* əvvəlcə

$$y_n^{[/]} + ay_n^{(/)} - a^2 y_n^2 = 0, n \ge 0 \tag{11}$$

tənliyinə baxılmışdır, buradə a verilmiş həqiqi ədəddir.

$$y_n \ne C \tag{12}$$

şərti daxilində (11) tənliyinin ümumi həlli

$$y_n = a^{2^n - 1} y_0^{2^n}, n > 0, \tag{13}$$

şəklində alınmış olur. Əgər (11) tənliyinə

$$y_0 = x \tag{14}$$

başlanğıc şərti qoşularsa, burada x verilmiş həqiqi sabitdir, onda (11), (14) Koşi məsələsinin həlli

$$y_n = a^{2^n-1}x^{2^n}, n \geq 0, \tag{15}$$

formasında olar. Əgər (11) tənliyinə

$$y_0^{\alpha} y_N^{\beta} = \gamma\ , \tag{16}$$

sərhəd şərti qoşularsa, burada $\alpha,\ \beta$ və γ verilmiş həqiqi sabitlərdir. Bu sərhəd məsələsinin yeganə olmayan həlli

$$y_{nk} = a^{2^n-1}\left(\sqrt[\alpha+\beta 2^N]{\alpha \cdot a^{-\beta(2N-1)} e^{i\frac{2\pi k}{\alpha+\beta\cdot 2^N}}}\right)^{2^n}, \quad k \in \mathrm{Z} \tag{17}$$

şəklində, həqiqi həlli isə yeganə olub,

$$y_n = a^{2^n-1}\left(\gamma\alpha^{-\beta\left(2^{N-1}\right)}\right)^{\frac{2^n}{\alpha+\beta\cdot 2^n}} \tag{18}$$

şəklindədir. Alınan nəticəni aşağıdakı teorem vasitəsilə verək.

Teorem 3. Əgər $a,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma$ və x verilmiş həqiqi sabitlərdirsə, onda (12) şərti daxilində (11) tənliyinin ümumi həlli (13) formasında olar, burada y_0 ixtiyari sabitdir. Bu halda (11), (14) Koşi məsələsinin yeganə həlli (15), (11), (16) sərhəd məsələsinin yeganə olmayan həlli (17), yeganə həqiqi həlli isə (18) şəklindədir.

İkinci fəsildə digər baxılan tənlik ikinci tərtib diskret additiv və multiplikativ törəməli

$$y_n^{[/]} \cdot y_n^{(/)}\left[\left(y_n^{(/)}\right)^{[/]} - \left(y_n^{[/]}\right)^{(/)} - y_n^{[/]} + 1\right] + y_n^{(/)} = f_n y_n\, , n \geq 0, \tag{19}$$

tənliyidir ki, onun ümumi həlli

$$y_{2m} = y_0 \prod_{k=0}^{m-1}(1+f_{2k})\ , m \geq 1\ , \tag{20}$$

$$y_{2m+1} = y_1 \prod_{k=0}^{m-1}(1+f_{2k+1})\ , m \geq 1\ , \tag{21}$$

formasındadır. Bu tənlik üçün

$$y_0 = \alpha, y_1 = \beta\ , \tag{22}$$

başlanğıc şərtləri və ya

$$y_0 = \alpha, y_N = \beta\ , \tag{23}$$

sərhəd şərtləri verilərsə, onda aşağıdakı nəticəni almış olarıq.

Teorem 4. Əgər f_n verilmiş həqiqi qiymətli ardıcıllıq, α və β verilmiş sıfır olmayan həqiqi sabitlərdirsə, onda (19) tənliyinin ümumi həlli (20), (21) vasitəsilə verilir, belə ki, y_0 və y_1 ixtiyari sabitlərdir. Bu zaman (19), (22) Koşi məsələsinin yeganə həlli var və bu həll

$$\begin{cases} y_{2m} = \alpha \prod_{k=0}^{m-1} (1 + f_{2k}) \ , m \geq 1, \\ y_1 = \frac{\beta}{\prod_{k=0}^{s-1}(1+f_{2k+1})}, \\ y_{2m+1} = \frac{\beta}{\prod_{k=m}^{s+1}(1+f_{2k+1})} \ , m \geq 1 \ , \end{cases} \tag{25}$$

əgər N = 2s+1 olarsa, onda (19), (23) sərhəd məsələsinin həlli:

$$\begin{cases} y_{2m} = \alpha \prod_{k=0}^{m-1} (1 + f_{2k}) \ , m \geq 1, \\ y_1 = \frac{\beta}{\prod_{k=0}^{s-1}(1+f_{2k+1})}, \\ y_{2m+1} = \frac{\beta}{\prod_{k=m}^{s+1}(1+f_{2k+1})} \ , m \geq 1 \ , \end{cases} \tag{25}$$

əgər N = 2s olarsa, onda (19) tənliyinin

$$y_0 = \alpha, y_N = \beta \ , \tag{26}$$

sərhəd şərtləri daxilində həlli:

$$\begin{cases} y_0 = \frac{\beta}{\prod_{k=0}^{s-1}(1+f_{2k})} \\ y_{2m+1} = \alpha \prod_{k=0}^{m-1} (1 + f_{2k+1}) \ , \ m \geq 1 \ , \\ y_{2n+1} = \frac{\beta}{\prod_{k=0}^{s-1}(1+f_{2k+1})} \ , m \geq 1 \ . \end{cases} \tag{27}$$

şəklində olur.

İkinci fəslin axırıncı məsələsi

$$y_n^{\{/\}^{k y_n^{[/]^k}}} = y_n^{k+1} \ , n \geq 0 \ , \tag{28}$$

tənliyi üçündür.

Bu tənliyin ümumi həllini almaq üçün bildiyimiz yeddi cəbri əməl kifayət deyil. Ona görə də yeni düz əməl “yandan qüvvətə yüksəltmə” və yeni tərs əməl “yeni loqarifmləmə” əməllərindən istifadə edilərək, (28) tənliyinin ümumi həlli üçün

$$y_n = y_0^{(1+\frac{1}{k})^n} \ , n \geq 1, k \in N \ , \tag{29}$$

ifadəsi alınmış olur, burada y_0 ixtiyari sabitdir.

Əgər

$$y_0 = \alpha \,, \tag{30}$$

başlanğıc şərti verilərsə, onda (28), (30) Koşi məsələsinin həlli

$$y_n = \alpha^{(1+\frac{1}{k})^n}, n \geq 1, k \in N \,, \tag{31}$$

şəklində olur.

Əgər

$$y_N^{\alpha} - y_0^{\beta} = \gamma \,, \tag{32}$$

sərhəd şərti verilərsə, onda aşağıdakı kimi nəticə alınmış olar:

Teorem 5. Birinci tərtib diskret multiplikativ və poverativ törəməli adi (28) tənliyinin ümumi həlli (29) şəklindədir, belə ki, y_0 ixtiyari sabitdir, (28), (30) Koşi məsələsinin həlli (31), əgər α, β və γ müsbət ədədlərdirsə, onda (28), (32) sərhəd məsələsinin yeganə olmayan həll

$$y_{nm} = y_{0m}^{(1+\frac{1}{k})^n}, n \geq 1, k \in N, m \in Z \,, \tag{33}$$

şəklindədir, belə ki,

$$y_{0m} = y^{\frac{1}{\alpha(1+\frac{1}{k})^N+\beta}} \cdot e^{i\frac{2m\pi}{\alpha(1+\frac{1}{k})^N+\beta}}, m \in Z \,, \tag{34}$$

(28), (32) sərhəd məsələsinin həqiqi həlli yeganə olub,

$$y_n = y^{\frac{(1+\frac{1}{k})^n}{\alpha(1+\frac{1}{k})^N+\beta}},$$

şəklindədir.

Nəhayət, dissertasiya işinin çoxölçülü məsələlərin həllinin araşdırılmasına həsr olunmuş *üçüncü fəsli* altı hissədən ibarət olub, orada diskret additiv, multiplikativ və poverativ törəməli ikinci tərtib iki ölçülü diferensial tənliklər üçün üç Koşi və üç sərhəd məsələsinə baxılmışdır.

Bu fəslin birinci və beşinci hissələrində

$$D_2^{[/]} D_1^{(/)} y_{mn} = f_{mn}, m \geq 0, n \geq 0, \tag{35}$$

ikinci tərtib, birinci dəyişənə (arqumentə) nəzərən diskret addtitiv törəməli, ikinci arqumentə nəzərən diskret multiplikativ törəməli iki ölçülü diferensial tənlik üçün

$$y_{0n} = \alpha_{0n}, n \geq 0;\ y_{s0} = \alpha_{s0}, s \geq 0\,; \qquad (36)$$

başlanğıc şərti və ya (35) tənliyinə $0 \leq m < M; 0 \leq n < N$ olduqda

$$\begin{cases} y_{Mn} = ay_{0n} + \varphi_n, 0 \leq n \leq N, \\ y_{mN} = by_{m0} + \psi_m, 0 \leq m \leq M. \end{cases} \qquad (37)$$

sərhəd şərtləri daxilində baxmaqla, alırıq:

Teorem 6. Əgər $f_{mn}, m \geq 0, n \geq 0$, olduqda verilmiş həqiqi qiymətli ardıcıllıqdırsa, onda (35) tənliyinin ümumi həlli

$$y_{mn} = y_{0n} + \sum_{s=0}^{m-1} \left(D_1^{(/)} y_{s0}\right) \prod_{k=0}^{n-1} f_{sk}\,, m \geq 1, n \geq 1, \qquad (38)$$

formasındadır, belə ki, y_{0n} və y_{s0} ixtiyari ardıcıllıqlardır, əgər (36) başlanğıc şərtində verilən α_{0n} və α_{s0} həqiqi qiymətli ardıcıllıqlardırsa, onda (35), (36) Koşi məsələsinin həlli

$$y_{mn} = \alpha_{0n} + \sum_{s=0}^{m-1} \left(D_1^{(/)} \alpha_{s0}\right) \prod_{k=0}^{n-1} f_{sk}\,, m \geq 1, n \geq 1, \qquad (39)$$

şəklində, əgər $a \neq 0, a \neq 1, b \neq 0$ verilmiş həqiqi sabitlər olub, $\varphi_n, 0 \leq n \leq N;\ \psi_m, 0 \leq m \leq M$ verilmiş həqiqi qiymətli ardıcıllıqlardırsa,

$$\prod_{k=0}^{N-1} f_{mk} \neq b, m \geq 0\,, \qquad (40)$$

və

$$b\varphi_0 + \psi_M = a\psi_0 + \varphi_N, \qquad (41)$$

şərtləri ödənilirsə, onda (35), (37) sərhəd məsələsinin həlli

$$y_{mn} = \frac{1}{a-1}\left[\sum_{s=0}^{M-1} \frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1} f_{sk} - b} \prod_{p=0}^{n-1} f_{sp} - \varphi_n\right] +$$

$$+ \sum_{s=0}^{m-1} \frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1} f_{sk} - b} \prod_{p=0}^{n-1} f_{sp}\,. \qquad (42)$$

şəklindədir.

Bu fəslin ikinci və üçüncü hissəsində

$$D_2^{\{/\}} D_1^{(/)} u_{mn} = f_{mn}, m \geq 0, n \geq 0\,, \qquad (43)$$

ikinci tərtib, birinci dəyişənə nəzərən (arqumentə görə) diskret additiv, ikinci dəyişənə nəzərən diskret poverativ törəməli iki ölçülü diferensial tənlik üçün

$$u_{m0} = \alpha_m, u_{0n} = \beta_n, m \geq 0, n \geq 0 \tag{44}$$

başlanğıc şərti daxilində məsələyə və ya (43) tənliyinə $0 \leq m < M, 0 \leq m < N$ olduqda baxmaqla

$$\begin{cases} u_{Mn} = a u_{0n} + \varphi_n, 0 \leq n \leq N\,, \\ u_{mN} = b u_{m0} + \psi_m, 0 \ \leq m \leq M\,. \end{cases} \tag{45}$$

sərhəd şərti daxilində məsələlər araşdırılmışdır. Əgər $f_{mn}, m \geq 0, n \geq 0$ olduqda həqiqi qiymətli ardıcıllıqdırsa, onda (43) tənliyinin ümumi həlli

$$u_{mn} = u_{0n} + \sum_{s=0}^{m-1} f_{sn-1}^{f_{sn-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{u_{s+10}-u_{s0}}}}}}} \quad , m \geq 1, n \geq 1\,, \tag{46}$$

şəklində, u_{0n} və u_{s0} ixtiyari ardıcıllıqlardır, əgər (44) şərtində verilən $\alpha_m,\ m \geq 0$ və $\beta_n,\ n \geq 0$ həqiqi qiymətli ardıcıllıqlardırsa, onda (43), (44) Koşi məsələsinin həlli

$$u_{mn} = \beta_n + \sum_{s=0}^{m-1} f_{sn-1}^{f_{sn-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{\alpha_{s+1}-\alpha_s}}}}}} \quad , m \geq 1, n \geq 1\,, \tag{47}$$

şəklindədir, belə ki, $\alpha_0 = \beta_0$. Əgər a və b verilmiş həqiqi sabitlər, $\varphi_n,\ 0 \leq n \leq N,\ \psi_m,\ 0 \leq m \leq M$ verilmiş həqiqi qiymətli ardıcıllıqlardırsa, onda

$$a \neq 1 \tag{48}$$

və

$$f_{sN-1}^{f_{sN-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{u_{s+10}-u_{s0}}}}}}} = b(u_{s+10} - u_{s0}) + \psi_{s+1} + \psi_s,\ \ s \geq 0, \tag{49}$$

tənliyinin həllinin varlığı şərti daxilində (43), (45) sərhəd məsələsinin həlli (46) şəklindədir, belə ki,

$$u_{0n} = \frac{\sum_{s=0}^{M-1} f_{sn-1}^{f_{sn-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{u_{s+10}-u_{s0}}}}}}} - \varphi_n}{a-1}\ , n \geq 1\,, \tag{50}$$

$(u_{s+10} - u_{s0})$ isə (49) tənliyindən təyin olunur.

Nəhayət, *üçüncü fəslin dördüncü və altıncı hissələrində*

$$D_2^{\{/\}} D_1^{[/]} u_{mn} = f_{mn}, \qquad m \geq 0, n \geq 0\,, \tag{51}$$

ikinci tərtib, birinci dəyişənə nəzərən diskret multiplikativ törəməli, ikinci dəyişənə nəzərən diskret poverativ törəməli iki ölçülü diferensial tənlik üçün

$$u_{m0} = N_m\,, m \geq 0\,;\ u_{0n} = \beta_n, n \geq 0\,;\ \alpha_0 = \beta_0\,, \tag{52}$$

başlanğıc şərti və ya (51) tənliyinə $0 \leq m < M\,,\ 0 \leq n < N$ olduqda baxmaqla, (45) sərhəd şərti daxilində aşağıdakı hökmü almış oluruq.

Teorem 7. Əgər $f_{mn},\ m \geq 0,\ n \geq 0$ olduqda verilmiş həqiqi qiymətli ardıcıllıqdırsa, onda (51) tənliyinin ümumi həlli

$$u_{mn} = u_{0n} \prod_{s=0}^{m-1} f_{sn-1}^{f_{sn-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{\frac{u_{s+10}}{u_{s0}}}}}}}}\,, m \geq 1\,, n \geq 1\,, \tag{53}$$

şəklindədir, belə ki u_{0n} və u_{s0} ixtiyari ardıcıllıqlardr. Əgər (52) şərtində verilən $\alpha_m,\ m \geq 0$ və $\beta_n,\ n \geq 0$ həqiqi qiymətli ardıcıllıq olub, $\alpha_0 = \beta_0$ olarsa, onda (51), (52) Koşi məsələsinin həlli

$$u_{mn} = \beta_n \prod_{s=0}^{m-1} f_{sn-1}^{f_{sn-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{\frac{\alpha_{s+1}}{\alpha_s}}}}}}}\,, m \geq 1\,, n \geq 1\,, \tag{54}$$

şəklində verilmiş olur. Əgər (51) tənliyinə $0 \leq m < M,\ 0 \leq n < N$ olduqda baxılarsa, bu zaman (51), (52) sərhəd məsələsində a, b həqiqi sabitlər, $\varphi_n\,,\ 0 \leq n < N\,,\ \psi_m\,,\ 0 \leq m < M$ olduqda verilmiş həqiqi qiymətli ardıcıllıqlardırsa, onda

$$\prod_{s=0}^{M-1} f_{sn-1}^{f_{sn-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{\frac{u_{s+10}}{u_{s0}}}}}}}} \neq a, n \geq 0, \tag{55}$$

və

$$\frac{u_{s+10}}{u_{s0}} = log_{f_{s0}} log_{f_{s1}} log_{f_{s2}} \dots log_{f_{sN-1}} \frac{u_{s+10}}{u_{s0}}\,, s \geq 0\,, \tag{56}$$

tənliyinin həllinin varlığı şərtləri daxilində (51), (45) sərhəd məsələsinin həlli (53) şəklində verilir, belə ki, $\frac{u_{s+10}}{u_{s0}}$ ifadəsi (56) tənliyindən, u_{0n} isə (55) şərti daxilində

$$u_{0n} = \frac{\varphi_n}{\prod_{s=0}^{M-1} f_{sn-1}^{f_{sn-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{\frac{u_{s+10}}{u_{s0}}}}}}}} - a}, n \geq 0, \tag{57}$$

ifadəsi vasitəsilə verilir.

NƏTICƏ

1. Diskret additiv törəməli adi diferensial tənliklər üçün baxılan sərhəd məsələlərinə qoşma məsələlər qurulmuş və məsələnin öz-özünə qoşmalıq şərti müəyyənləşdirilmişdir.
2. Diskret additiv, multiplikativ və poverativ törəməli adi diferensial tənliklər üçün Koşi və sərhəd məsələlərinə baxılmış və onların həlli üçün analitik ifadələr alınmışdır.
3. Elə adi birinci tərtib diskret törəməli diferensial tənliyə baxılmışdır ki, onun ümum həllinin tapılmasında bildiyimiz yeddi cəbri əməl kifayət etmir. Yeni düz əməl (yandan qüvvətə yüksəltınə) və yeni tərs əməl (yeni loqarifmalama) təyin etmək lazım gəlmişdir.
4. Diskret törəməli çoxğlçülü tənliklər üçün Koşi cə sərhəd məsələlərinin həlli üçün analitik ifadələr alınmışdır.

Dissertasiyanın əsas elmi müddəaları aşağıdakı nəşrlərdə öz əksini tapmışdır:

1. Решение задачи Коши и граничной задачи для уравнения дискретного аддитивного и дискретно мультипликативного первого порядка // "Müasir təlim texnologiyaları tətbiq olunmasının təhsilin keyfiyyətinə təsiri" mövzusunda gənc tədqiqatçıların Respublika Elmi-praktik konfransı. Lənkəran Dövlət Universiteti, 2019, s. 64.
2. The adjoim problem to a boundary value problem with an additive discrete derivative // XXXV İnternational Conference Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2020), s. 15 – 16.
3. Boundary value problem for an equation with second-order partial duscrete derivatives // XXXVI İnternational Conference Problems of decision making under Uncertainties (PDMU-2021), may 11 – 14, 2021, Didicated to 80-th anniversary of Professor MykhailoBartish, s. 105 – 106.
4. Construktion of the Adjoint problem to the discret problems for the second order equcation // Advanced Mathermatical Models&Applications. Vol. 6, № 2, 2021, s. 182 – 188.
5. Problems for the first-order differential equations with descrete additive and discrete multiplicative derivatives // Journal of Counferary applied Mathemstics. Vol. 11, № 2, 2021, s. 3 – 10.
6. Задачи Коши для уравнения второго порядка с дискретными производными // Pedaqoji Universitetinin Xəbərləri. Riyaziyyat və təbiət elmləri seriyası, 2021, № 2, s. 39 – 44.
7. Boundary-Value problem for a two-dimensional second order-type equation with discrete additive and multiplicative derivatives // EESJ (AST EUROPEAN SCIENCE JOURNAL). Vol. 1, № 4(68), 2021, s. 61 – 64.
8. Построение сопряженной задачи к граничной задаче для дискретно аддитивной производной // Pedaqoji

Universitetinin Xəbərləri. Riyaziyyat və təbiət emləri seriyası, 2021, № 3, s. 33 – 38.

9. Задача Коши для двумерного дифференциального уравнения второго порядка с дискретными мультипликативными и степенными производными // Proceeding sof the Institute of Mathematics and Mechanics. National Academy of Sciences of Azerbaijan, 2021, pp. 202 – 210.

Dissertasiyanın müdafiəsi **27 sentyabr 2022**-ci il tarixində saat **14^{00}**–da Bakı Dövlət Universitetinin nəzdində fəaliyyət göstərən FD 2.17 Dissertasiya Şurasının iclasında keçiriləcək.

Ünvan: Bakı şəh., akad.Z.Xəlilov küç., 23.

Dissertasiya işi ilə Bakı Dövlət Universitetinin kitabxanasında tanış olmaq mümkündür.

Dissertasiya işi və avtoreferatın elektron versiyaları Bakı Dövlət Universitetinin rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat 28 iyul **2022**-ci il tarixində zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 04.07.2022
Kağızın formatı: 60×84 1/16
Həcm: 40000
Tiraj: 30